



物流码



· 全心全意 品质为真 ·

服务热线：4000-555-100

CONTENTS

重点强化练(一)	不等式的性质与基本不等式
重点强化练(二)	函数图象与性质
重点强化练(三)	函数零点问题
重点强化练(四)	导数的几何意义及其应用
重点强化练(五)	导数及其应用
重点强化练(六)	三角函数的图象与性质
重点强化练(七)	三角恒等变换
重点强化练(八)	解三角形
重点强化练(九)	等差数列与等比数列
重点强化练(十)	数列递推与数列求和
重点强化练(十一)	空间中的平行与垂直
重点强化练(十二)	空间中的截面问题、折叠与展开问题
重点强化练(十三)	隐圆问题
重点强化练(十四)	焦点三角形与离心率
重点强化练(十五)	焦点弦
重点强化练(十六)	直线与圆锥曲线、圆与圆锥曲线
重点强化练(十七)	随机变量及其分布
重点强化练(十八)	概率分布中的决策类问题
重点强化练(十九)	创新综合题专练

增分加练
数学
BS



绿色印刷产品

印刷质检码20257300



一、选择题:本题共8小题,在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的.

1. [2025·四川遂宁模拟] 若 $a > 1$, 则 $4a + \frac{1}{a-1}$ 的最小值为 ()

A. 4 B. 6
C. 8 D. 无最小值

2. [2024·河北唐山一模] 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$, 则 $f(x)$ 的最小值为 ()

A. 0 B. 2
C. $2\sqrt{2}$ D. 3

3. [2025·江苏宿迁调研] 若 $a > 0, b > 0, a + 2b = 3$, 则 $\frac{3}{a} + \frac{6}{b}$ 的最小值为 ()

A. 9 B. 18
C. 24 D. 27

4. 对于任意实数 a, b , “ $a^2 + b^2 > 2ab$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

5. [2024·人大附中三模] 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x > y$, 则 ()

A. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$
B. $\tan x - \tan y > 0$
C. $\left(\frac{1}{e}\right)^x - \left(\frac{1}{e}\right)^y < 0$
D. $\ln|x| - \ln|y| > 0$

6. [2024·福州一模] 已知实数 x, y 满足 $3xy + y^2 = 1, y > 0$, 则 $2x + y$ 的最小值是 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

7. [2024·山东新高考联盟模拟] 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a, b, c \in \mathbf{R})$ 的解集为 $(-4, 1)$, 则 $\frac{c^2 + 9}{a + b}$ 的取值范围为 ()

A. $[-6, +\infty)$ B. $(-\infty, 6)$
C. $(-6, +\infty)$ D. $(-\infty, -6]$

8. [2024·山东淄博二模] 记 $\max\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中最大的数. 已知 x, y 均为正实数, 则 $\max\left\{\frac{2}{x}, \frac{1}{y}, x^2 + 4y^2\right\}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. 2 D. 4

班级	
姓名	
答题卡	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	

二、选择题：本题共 3 小题. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. [2024 · 安徽淮北质检] 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $a > b > c$, 则 $a + b > c$
 B. 若 $a > b > |c|$, 则 $a^2 > b^2 > c^2$
 C. 若 $a < b < c < 0$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$
 D. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$

10. [2024 · 深圳南山区模拟] 下列命题中, 为真命题的是 ()

- A. $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$
 B. $\exists x < 0, x + \frac{1}{x} > -2$
 C. $\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}$
 D. $\exists x < 0, \frac{x}{1+x^2} \leq -\frac{1}{2}$

11. [2024 · 湖南邵阳三模] 若正实数 x, y 满足 $2x + y = xy$, 则 ()

- A. $xy \leq 8$
 B. $8x + y \geq 18$
 C. $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} \geq \frac{1}{2}$
 D. $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{y-2} \geq \sqrt{6}$

三、填空题：本题共 3 小题.

12. [2024 · 重庆渝中区模拟] 已知 $x > 0, y > 0$ 且 $x + 2y = 1$, 则 $\log_2 x + \log_2 (2y)$ 的最大值为 _____.

13. [2024 · 江西宜春三模] 已知 $x > 0, y > 0$, 且满足 $4x^2 + 9y^2 + 6xy - 3 = 0$, 则 $2x + 3y$ 的最大值为 _____.

14. [2025 · 江苏南通模拟] 以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数. 设 $0 < a < b < c < 1$, 已知 $b \geq 2a$ 或 $a + b \leq 1$, 则 $\max\{b-a, c-b, 1-c\}$ 的最小值为 _____.



一、选择题: 本题共 8 小题, 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的.

1. [2024·四川南充二模] 已知函数 $f(x) = \frac{3}{x}$, 则

函数 $y = f(x-1) + 1$ 的图象 ()

- A. 关于点 $(1, 1)$ 对称
- B. 关于点 $(-1, 1)$ 对称
- C. 关于点 $(-1, 0)$ 对称
- D. 关于点 $(1, 0)$ 对称

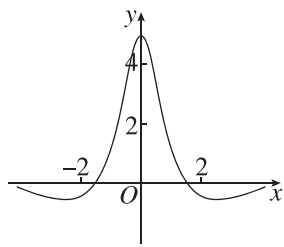
2. [2023·天津卷] 函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()

A. $f(x) = \frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2}$

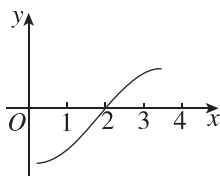
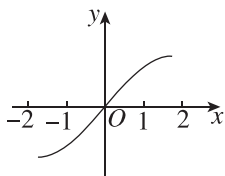
B. $f(x) = \frac{5\sin x}{x^2 + 1}$

C. $f(x) = \frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2}$

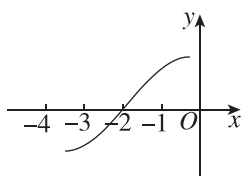
D. $f(x) = \frac{5\cos x}{x^2 + 1}$



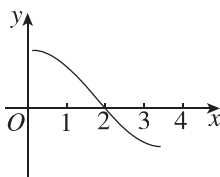
3. 若函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = f(2-x)$ 的图象为 ()



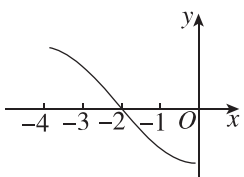
A



B

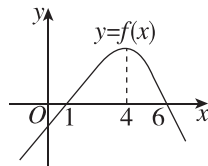


C



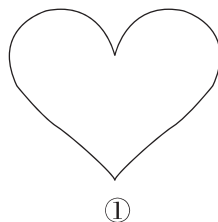
D

4. [2024·江苏常州模拟] 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 的图象如图所示, $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 则 $\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$ 的解集为 ()

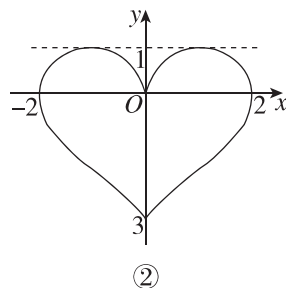


- A. $(1, 6)$
- B. $(1, 4)$
- C. $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$
- D. $(1, 4) \cup (6, +\infty)$

5. [2024·河南实验中学模拟] 如图①, 心形代表浪漫的爱情, 人们用它来向所爱之人表达爱意. 一心形作为建筑立面造型, 呈现出优雅的弧度, 心形木屋融入山川、河流、森林、草原, 营造出一个精神和自然聚合的空间. 图②是由此抽象出来的一个“心形”图形, 这个图形可看作由两个函数的图象构成, 则“心形”在 x 轴上方的图象对应的函数解析式可能为 ()



①



②

- A. $y = |x| \sqrt{4-x^2}$
- B. $y = x \sqrt{4-x^2}$
- C. $y = \sqrt{-x^2 + 2|x|}$
- D. $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \geq |x|$ 且 $f(x) \geq 2^x$, $x \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $f(a) \leq |b|$, 则 $a \leq b$
- B. 若 $f(a) \leq 2^b$, 则 $a \leq b$
- C. 若 $f(a) \geq |b|$, 则 $a \geq b$
- D. 若 $f(a) \geq 2^b$, 则 $a \geq b$

班级

姓名

答题卡

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

全品
高考
复习
方案
数学
85

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} h(x) (x < 0), \\ -\left(\frac{1}{e}\right)^x - 1 (x \geq 0), \end{cases}$ 将函数

$h(x)$ 的图象向左平移一个单位长度, 再向上平移一个单位长度后得函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象. 若 $f(x + 2) < f(x^2)$, 则实数 x 的取值范围是 ()

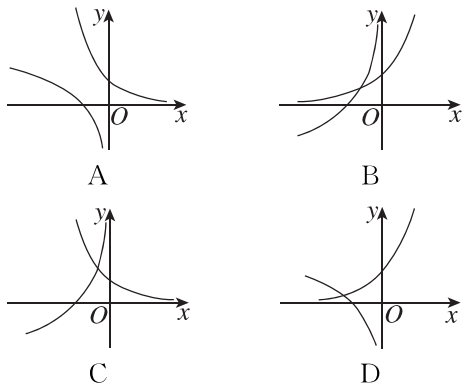
- A. $(-1, 2)$
B. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
C. $[-2, -1) \cup (2, +\infty)$
D. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

8. [2024 · 石家庄模拟] 已知函数 $f(x) = |2x - 1|$, 则曲线 $y = f[f(x)]$, $x \in [0, 1]$ 与直线 $y = 1$ 围成的封闭图形的面积为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

二、选择题: 本题共 3 小题. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.

9. [2024 · 辽宁部分学校联考] 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$ 且 $b \neq 1$, $a^x = b^{-x}$, 函数 $y = \log_a(-x)$ 与 $y = b^x$ 的图象可能是 ()



10. [2024 · 江苏盐城模拟] 中国传统文化中很多内容体现了数学的对称美, 如图所示的太极图是由黑白两个鱼形纹组成的圆形图案, 充分展现了相互转化、对称统一的形式美与和谐美. 给出定义: 在平面直角坐标系 xOy 中, 能够将圆心位于坐标原点的圆 O 的周长和面积同时平分的函数称为这个圆的“优美函数”. 给出下列说法, 其中说法正确的是 ()



A. 对于任意一个圆 O , 其“优美函数”有无数个

B. 函数 $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 可以是某个圆的“优美函数”

C. 余弦函数 $y = \cos x$ 可以同时是无数个圆的“优美函数”

D. 函数 $y = f(x)$ 是“优美函数”的充要条件为存在 $a, b \in \mathbf{R}$, 使得 $f(a+x) + f(a-x) = 2b, x \in \mathbf{R}$ 恒成立

11. 已知 $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$, 若直线 $x = k (k > 0)$ 与 $f(x), g(x)$ 的图象交点的纵坐标分别为 n, m , 且 $n < 2m$, 则 ()

- A. $n + m < \frac{3\sqrt{2}}{2}$
B. $n - m < \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $n^n > (m+1)^{m+1}$
D. $n^{m+1} < (m+1)^n$

三、填空题: 本题共 3 小题.

12. [2024 · 福建宁德模拟] 对于 $a, b \in \mathbf{R}$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b, \\ b, & a < b, \end{cases}$ 则函数 $f(x) = \max\left\{|x + 1|, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}$ 的最小值为_____.

13. [2025 · 安徽合肥一六八中学月考] 若函数 $f(x) = |2^x - m| + m$ 在 $(-\infty, 2]$ 上的最大值为 4, 则 m 的取值范围是_____.

14. [2024 · 淮北一模] 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1. \end{cases}$ 若互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3)$ 的取值范围是_____.



一、选择题:本题共8小题,在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的.

1. 已知函数 $f(x) = \ln x + x - \frac{2}{x}$, 则 $f(x)$ 的零点所在的区间为 ()

A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(2, e)$ D. $(e, 3)$

2. [2024·河北唐山模拟] “ $a \leq -2$ ”是“函数 $f(x) = ax + 3$ 在区间 $[-1, 2]$ 上存在零点”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. [2024·广东揭阳模拟] 函数 $f(x) = \ln \frac{x-2}{x} + x-1$ 的所有零点之和为 ()
- A. -2 B. -1
C. 1 D. 2

4. 已知方程 $e^x + x - 2 = 0$, $\ln x + x - 2 = 0$ 的根分别为 a, b , 则 $a+b$ 的值为 ()
- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

5. [2024·湖南邵阳模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2, \\ 5-x, & x > 2, \end{cases}$ 若方程 $[f(x)]^2 - (m+1)f(x) + m = 0$ 有5个不同的实数根, 则实数 m 的取值范围为 ()
- A. $(0, 1) \cup (1, 3)$ B. $(0, 1)$
C. $[0, 1)$ D. $(1, 3)$

6. [2024·广东深圳模拟] 当 $a \geq e$ 时, 方程 $e^x + x + \ln x = \ln a + \frac{a}{x}$, $x \in [1, +\infty)$ 的根的个数为 ()
- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

7. 若不等式 $(|x-a| - b) \sin(\pi x + \frac{\pi}{6}) \leq 0$, $x \in [-1, 1]$ 恒成立, 则 $2a+b =$ ()
- A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{5}{6}$
C. $\frac{5}{3}$ D. 2

8. [2024·山东德州模拟] 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x+2)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = (\sqrt{e})^x$, 若在区间 $[0, 10]$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - mx - 1$ ($m > 0$) 有5个零点, 则实数 m 的取值范围是 ()
- A. $[\frac{e-1}{10}, \frac{e-1}{6})$ B. $(0, \frac{e^5-1}{10})$
C. $(\frac{e-1}{11}, \frac{e-1}{6})$ D. $(0, \frac{e-1}{10}]$

班级	
姓名	
答题卡	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	

二、选择题: 本题共 3 小题. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.

9. 若函数 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + a$ 有 3 个零点, 则实数 a 的值可以是 ()

- A. -10 B. -9
C. 2 D. 3

10. [2024 · 江苏连云港模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 6x + 9, & x > 2, \end{cases}$ 若方程 $f(x) = k$ 有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $0 < k < 1$
B. $2x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{2}$
C. $x_1x_2 + x_3 + x_4 = 6$
D. $3 < x_1 + 2x_2 < \frac{9}{2}$

11. [2024 · 福建福州模拟] 已知函数 $f(x) = ax(e^x + e^{-x}) - e^x + e^{-x}$ 恰有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 ()

- A. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
B. 实数 a 的取值范围为 $(0, 1]$
C. $ax_1 + 1 > 0$
D. $ax_3 + a > 1$

三、填空题: 本题共 3 小题.

12. [2024 · 黑龙江哈尔滨模拟] 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$. 例如: $[-3.2] = -4, \{-3.2\} = 0.8$, 则方程 $2x\{x\} - x - 1 = 0$ 的所有实根之和是_____.

13. [2024 · 福建泉州一模] 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x + |e^x - a|$ 有且只有两个零点, 则 a 的取值范围为_____.

14. [2024 · 江苏扬州模拟] 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \geq 0, \\ -x^2 + ax, & x < 0. \end{cases}$ 当 $a = 1$ 时, 函数 $y = f[f(x)]$ 有_____个零点; 若函数 $y = f[f(x)]$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.





一、选择题:本题共8小题,在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的.

1. [2024·福建厦门一模] 已知直线 l 与曲线 $y = x^3 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处相切,则 l 的倾斜角为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

2. [2025·湖南永州模拟] 函数 $f(x) = x^2 + \ln x$ 的图象在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是 ()

A. $3x - y - 2 = 0$

B. $2x - y - 2 = 0$

C. $3x + y - 2 = 0$

D. $2x + y - 2 = 0$

3. [2024·四川宜宾三模] 若曲线 $y = e^x + a$ 的一条切线方程是 $y = x - 1$,则 $a =$ ()

A. -2

B. 1

C. -1

D. e

4. 已知函数 $f(x) = xe^x + 1$,过点 $P(2, 1)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的切线的条数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. [2024·河北邢台一模] 如果方程 $F(x, y) = 0$ 能确定 y 是 x 的函数,那么称这种方式表示的函数是隐函数.隐函数的求导方法如下:在方程 $F(x, y) = 0$ 中,把 y 看成 x 的函数 $y = y(x)$,则方程可看成关于 x 的恒等式 $F(x, y(x)) = 0$,在等式两边同时对 x 求导,然后解出 $y'(x)$ 即可.例如:求由方程 $x^2 + y^2 = 1 (y < 0)$ 所确定的隐函数的导数 y' ,将方程 $x^2 + y^2 = 1 (y < 0)$ 的两边同时对 x 求导,则 $2x + 2y \cdot y' = 0$ (y 是 x 的函数,需要用复合函数的求导法则求导),得 $y' = -\frac{x}{y} (y < 0)$.利用隐函数求导方法可求得曲线 $xy + \ln y = 2$ 在点 $(2, 1)$ 处的切线方程为 ()

A. $x - 3y + 1 = 0$

B. $x + 3y - 5 = 0$

C. $3x - y - 5 = 0$

D. $2x + 3y - 7 = 0$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x, & x \geq 0, \\ -e^x + 1, & x < 0. \end{cases}$ 若 $f(x) \geq kx$

恒成立,则 k 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$

B. $(-\infty, 5]$

C. $(0, 5]$

D. $[0, 5]$

7. 已知 $m > 0, n > 0$,直线 $y = \frac{1}{e}x + m$ (m 为常数)

与曲线 $y = \ln x - n + 4$ (n 为常数)相切,则 $\frac{1}{m} +$

$\frac{1}{n}$ 的最小值是 ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

8. [2025·山东新高考联合质检联考] 若过点 $(1, m)$ 可以作函数 $y = (x + 1)e^x$ 的图象的三条切线,则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-4e^{-2}, 0)$

B. $(-6e^{-3}, 0)$

C. $(-6e^{-3}, 2e)$

D. $(e, 2e)$

二、选择题:本题共3小题,在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.

9. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的图象在点 $(m, f(m))$ 处的切线为 l_m ,则 ()

A. l_m 的斜率的最小值为 -2

B. l_m 的斜率的最小值为 -3

C. l_0 的方程为 $y = 1$

D. l_{-1} 的方程为 $y = 9x + 6$

10. 已知直线 $y = kx$ ($k > 0$) 交曲线 $y = e^x$ 于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点,其中 $x_1 < x_2$, O 为坐标原点,过 A, B 分别作曲线 $y = e^x$ 的切线,斜率分别为 k_1, k_2 ,则 ()

A. k 的取值范围是 $(e, +\infty)$

B. 存在 $k \in (0, +\infty)$,使 A 为 OB 的中点

C. $y_1 + y_2 > 2e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$

D. 存在 $k \in (0, +\infty)$,使两条切线互相垂直

班级
姓名
答题卡
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

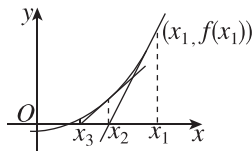
11. [2024·长沙一模] 英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点. 如图, 在横坐标为 x_1 的点处作 $f(x)$ 的图象的切线, 切线与 x 轴交点的横坐标为 x_2 , 用 x_2 代替 x_1 重复上面的过程得到 x_3 , 一直进行下去, 得到数列 $\{x_n\}$, 叫作牛顿数列. 若函数 $f(x) = x^2 - x - 6$, $a_n = \ln \frac{x_n + 2}{x_n - 3}$, 且 $a_1 = 1, x_n > 3$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列说法正确的是 ()

A. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

B. 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列

C. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

D. $S_{2025} = 2^{2025} - 1$



三、填空题: 本题共 3 小题.

12. [2025·江苏无锡模拟] 曲线 $y = \frac{\sin x}{x}$ 在点 $M(-\pi, 0)$ 处的切线方程为_____.

13. [2025·广东深圳中学模拟] 若直线 $y = kx + b$ (k, b 为常数) 与函数 $y = e^{x-1}$ 和 $y = e^x - 2$ 的图象都相切, 则 $b =$ _____.

14. 已知 A, B 分别是曲线 $y = \ln x - \frac{1}{x}$ 和直线 $y = 2x$ 上的点, 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 3 小题, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. [2025·武汉模拟] 已知 $f(x) = f'(1)x^2 - x + 2\ln x$.

(1) 求 $f'(1)$ 并写出 $f(x)$ 的表达式;

(2) 记 $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + x^2 + x] + a$, 若曲线 $y = e^x + 2x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线, 求 a 的值.

16. 已知函数 $f(x) = 2x \ln x - \frac{x^3}{3} + x - 1$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 A 处的切线为 l_1 , 函数 $g(x) = e^x - e^{-x}$ 的图象在点 B 处的切线为 l_2 , $l_1 \parallel l_2$, 求直线 AB 的方程.

17. 已知函数 $f(x) = \ln x, g(x) = 2e^x$.

(1) 若直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = g(x)$ 的一条切线, 求出 b 与 k 的函数关系式;

(2) 当 $m > 1$ 时, 过点 $(m, f(m))$ 的曲线 $y = f(x)$ 的切线 l 也与曲线 $y = g(x)$ 相切, 试求直线 l 的条数.



解答题: 本题共 5 小题, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

1. [2024·湖南益阳二模] 已知 a, b 为正实数, 函

数 $f(x) = \frac{\ln x}{ax+b}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$

处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}(ax-b)$.

(1) 求 $a+b$ 的值;

(2) 求证: $f(x) \geq \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}$.

2. [2023·新课标 I 卷] 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

3. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + 3 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $a = 0$ 时, 若 $xf(x) > kx - k + 2, x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 求整数 k 的最大值.

4. [2024 · 广东佛山二模] 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x - ax - 5$.
- (1) 当 $a=3$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) + x_1 + x_2 < 0$.

5. [2025 · 辽宁东北育才中学月考] 在高等数学中, $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其附近可以用一个多项式函数近似表示, 具体形式为 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$ (其中 $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 次导数), 以上公式我们称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式.
- (1) 分别求 $y=e^x, y=\sin x, y=\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式;
- (2) 若上述泰勒展开式中的 x 可以推广至复数, 证明: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (其中 i 为虚数单位);
- (3) 当 $x \in (0, \frac{3}{2})$ 时, 求证: $e^{\sin x} > x + 1$.

参考数据: $\ln \frac{5}{2} \approx 0.916$.